



Milan Ambrožič, Zlatko Bradač, Andrej Nemec  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru

## Različni kvadri – lepenje in trenje

Strategija (metoda): skupinski ali demonstracijski poskus, delovni listi

Starostna skupina: 1. ali 2. letnik SŠ

Generične kompetence: sposobnost interpretacije in sinteze sklepov, sposobnost skupinskega dela, sposobnost učenja in reševanja problemov, uporaba matematičnih idej in tehnik

Umestitev v učni načrt: Sile na klancu, definicija lepenja in trenja

Predmet: fizika, povezava z matematiko

### A) Teoretični del

Pri teh poskusih, bodisi demonstracijskih bodisi skupinskih, se dijaki soočijo s po dvema alternativnima meritvama koeficientov lepenja in trenja: na klancu (samo za lepenje) ali pa na vodoravni podlagi. Primerjava izidov meritev sprošča ustvarjalno razmišljanje in med drugim krepi generičnih kompetenc: sposobnost interpretacije in sinteze sklepov, reševanje problemov, itd. Uporabijo se lahko kvadri iz različnih snovi, ki so navadno na razpolago med fizikalno opremo srednjih šol.

### B) Praktični del

KOPIJA DELOVNEGA LISTA ZA VSE DIJAKE

## Lepenje in trenje – merjenje koeficientov lepenja in trenja DELOVNI LIST Z RAZLAGO IN NAVODILI ZA POSKUSE

### A Razlaga in izpeljava enačb

#### A1 Merjenje koeficienta lepenja s spreminjanjem nagiba podlage

Telo (kvader) postavimo na klanec (nagnjeno desko) in klancu postopoma povečujemo nagib, dokler telo ne zdrsne po njem. Težo telesa vektorsko razstavimo na dve komponenti, dinamično (vzporedno s klancem) in statično (pravokotno nanj):  $\vec{F}_g = \vec{F}_d + \vec{F}_s$ ; glej pravokotni trikotnik teh sil na sliki 1. Odslej ne bomo pisali vektorskega znaka nad simbolom za silo, ker bomo delali z velikostmi sil. Dokler telo miruje, sklepamo, da sila lepenja  $F_1$  uravnoveša dinamično komponento teže  $F_d$ . Vendar pa se sila lepenja ne more povečevati



poljubno, temveč je maksimalna sila lepenja enaka vrednosti:  $F_{IM} = k_l F_n$ , kjer je  $k_l$  koeficient lepenja med podlago in stično ploskvijo telesa,  $F_n$  pa normalna (pravokotna komponenta) sila podlage na telo. Na klancu je zaradi ravnovesja sil le-ta enaka statični komponenti teže:  $F_n = F_s$ .

Zaradi podobnosti pravokotnih trikotnikov na sliki 1 velja enakost ustreznega razmerja katet:

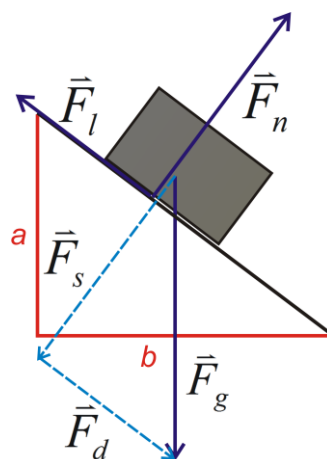
$$\frac{F_d}{F_s} = \frac{a}{b}$$

Ker so sile v ravnovesju, imamo dva para enakih sil:  $F_l = F_d$  in  $F_n = F_s$ , tako da enačbo prepišemo:

$$\frac{F_l}{F_n} = \frac{a}{b}$$

Za silo lepenja vzamemo njeno maksimalno možno vrednost tik pred zdrsom telesa:  $F_l = F_{IM} = k_l F_n$ , vstavimo v zadnjo enačbo in dobimo:

$$k_l = \frac{a}{b} \quad (1)$$



**Slika 1:** Sile na klancu pri lepenju

## A2 Merjenje koeficienta lepenja na vodoravni podlagi s škripcem in utežjo

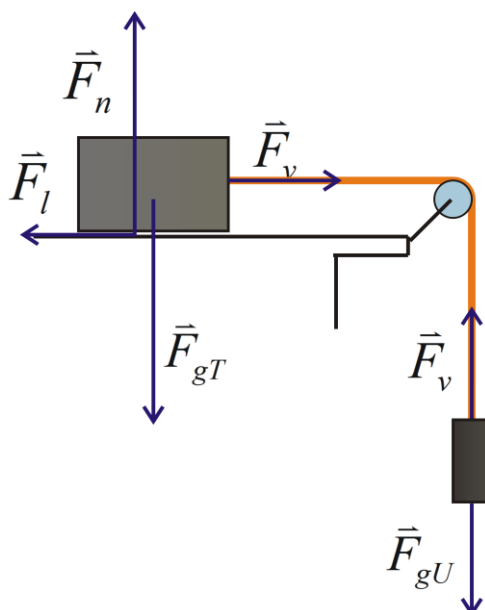


Telo (kvader) z maso  $m_T$  postavimo na vodoravno podlago, nanj privežemo vrvico, jo napeljemo čez škripec na robu podlage, na njen prosti konec pa obešamo vedno več uteži (slika 2). V trenutku, ko telo zdrsne, je teža vseh uteži s skupno maso  $m_U$  ravno enaka maksimalni sili lepenja. Sila vrvice  $F_v$ , ki deluje na telo, je namreč po velikosti enaka teži uteži  $F_{gU}$ . Normalna sila tal  $F_n$  je enaka teži telesa  $F_{gT}$ , maksimalna sila lepenja pa je:  $F_{IM} = k_l F_n$ . Od tod lahko izračunamo koeficient lepenja med podlago in telesom:

$$F_{IM} = F_{gU}$$

$$k_l m_T g = m_U g$$

$$k_l = \frac{m_U}{m_T} \quad (2)$$



**Slika 2:** Sile na vodoravni podlagi pri lepenju. Opozorilo: sila vrvice na dveh mestih (pri telesu in pri uteži) je zaradi večje nazornosti obakrat označena z istim simbolom, čeprav vektorja nista enaka (imata enaki velikosti, a različni smeri).

### A3 Merjenje koeficienta trenja na vodoravni podlagi s škripcem in utežjo

Poskus je podoben kot pri merjenju koeficienta lepenja, le da je sedaj masa vseh uteži  $m_U$  večja od mejne vrednosti za zdrs telesa po vodoravni podlagi (slika 3). To je nekaj težja naloga kot pri razlagi A2, saj gre sedaj za neravnovesje sil in si je treba pomagati tudi z merjenjem poti  $s$  in časa  $t$ , v katerem naredi telo to pot. Začnemo s sistemom dveh enačb za 2. Newton zakon, ki opisuje gibanje telesa in spuščajoče uteži, kjer silo vrvice označimo z  $F_v$ :



$$m_T a = F_v - F_{tr} = F_v - k_{tr} m_T g$$

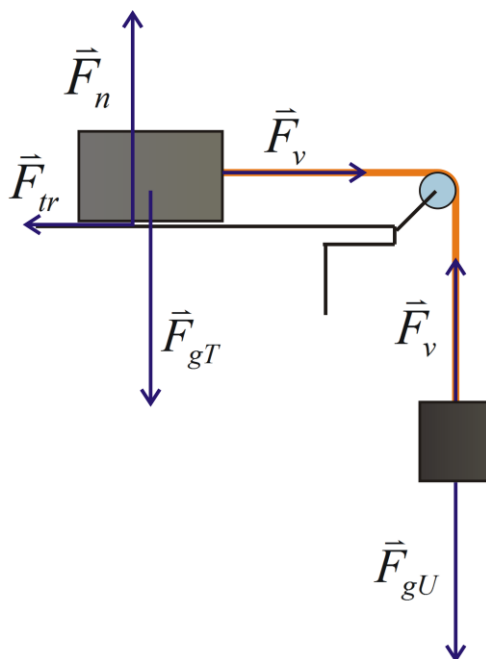
$$m_U a = F_g - F_v = m_U g - F_v$$

Pospešek  $a$  je namreč enak pri uteži in kvadru. Enačbi seštejemo, da izločimo neznanko  $F_v$ , potem pa izrazimo pospešek:

$$a = (m_U - k_{tr} m_T) g / (m_U + m_T)$$

Če upoštevamo enačbo za pot pri enakomerno pospešenem gibanju z začetno hitrostjo nič:  $s = a t^2 / 2$ , lahko nazadnje izrazimo  $k_{tr}$ :

$$k_{tr} = \frac{m_U}{m_T} - \frac{2s(m_U + m_T)}{gt^2 m_T} \quad (3)$$



**Slika 3:** Sile na vodoravni podlagi pri trenju. Razlika med to sliko in sliko 2 je v tem, da imamo sedaj namesto sile lepenja silo trenja; medtem ko so bile prej tri sile enake:  $F_l = F_v = F_{gU}$ , velja sedaj neenakost:  $F_{tr} < F_v < F_{gU}$ , saj se giblje telo pospešeno na desno, utež pa pospešeno navzdol.

## B Opisi poskusov

### POSKUS B1: Merjenje koeficientov lepenja z nagibanjem podlage



## Razlaga A1, enačba (1)

**POTREBŠČINE:** več kvadrov iz različnih snovi, lesena deska, ravnilo

**POTEK:** Kvader postavite na desko na delovni mizi. Počasi ji povečujte nagib, dokler kvader ne zdrsne. Pri kotu, pri katerem se to zgodi, izmerite z ravnilom vodoravno in navpično razdaljo pri nagibu deske (stranici  $a$  in  $b$  na sliki 1). Poskus naredite za več materialov. V šoli si na delovni list zapišite le izmerjene vrednosti, račun koeficienta lepenja pa naj naredi vsak sam doma. Skupina naj skuša poskus dodelati, da bodo meritve čim natančnejše, npr. povečevanje nagiba deske z uporabo stojala z vijakom namesto z roko, itd.

**POSKUS B2:** Merjenje koeficientov lepenja na vodoravni podlagi

## Razlaga A2, enačba (2)

**POTREBŠČINE:** več kvadrov iz različnih snovi, lesena deska, lahka vrvica (nit), škripec, komplet uteži, tehcnica

**POTEK:** Kvader postavite na desko na delovni mizi. Na kaveljček privežite vrvico, jo napeljite čez škripec na robu podlage (poskrbite, da bo vrvica vodoravna), na njen prosti (viseči) konec pa obešajte vedno več uteži. Zabeležite si maso kvadra in maso vseh uteži v trenutku, ko kvader zdrsne. Poskus naredite za več materialov. V šoli si na delovni list zapišite le izmerjene vrednosti, račun koeficienta lepenja pa naj naredi vsak sam doma. Skupina naj skuša poskus dodelati, da bodo meritve čim natančnejše, npr. dodajanje majhnih uteži, tik preden kvader zdrsne, itd.

**POSKUS B3:** Merjenje koeficientov trenja na vodoravni podlagi (zahtevnejši poskus)

## Razlaga A3, enačba (3)

**POTREBŠČINE:** kvader, lesena deska, ravnilo ali metrski trak, lahka vrvica (nit), škripec, komplet uteži, tehcnica, štoparica

**POTEK:** Kvader postavite na desko na delovni mizi. Na kaveljček privežite vrvico, jo napeljite čez škripec na robu podlage (poskrbite, da bo vrvica vodoravna), na njen prosti (viseči) konec pa obešajte vedno več uteži, dokler kvader ne zdrsne. Nato dodajte še kako utež. Zabeležite si maso kvadra in maso vseh uteži. Vnaprej izberite in na deski označite primerno razdaljo, ki naj bi jo kvader pri drsenju prepotoval, nato pa izmerite še čas drsenja. V šoli si na delovni list zapišite le izmerjene vrednosti, račun koeficienta trenja pa naj naredi vsak sam doma. Skupina naj skuša poskus dodelati, da bodo meritve čim natančnejše, npr. z izbiro tolikšne skupne mase uteži, da se kvader ne bo premikal niti prepočasi niti prehitro in bo merjenje časa učinkovito in dovolj natančno.

## C Dodatna navodila in posebne naloge

**POMEMBNO:** Po izvedenih poskusih si zapiši tudi rezultate drugih skupin, o katerih poročajo. Delovne list doma izpolni v celoti. Enako velja za vse meritve pri demonstracijskih frontalnih poskusih (če gre za učiteljeve demonstracijske poskuse namesto dela po skupinah).



Podatke in izračune ter odgovore na POSEBNE NALOGE lahko pišeš spodaj na ta list ali pa drugam. Označi poskus, ki ga je delala tvoja skupina, če je delo potekalo po skupinah (B1, B2 ali B3). Napiši tudi sklepe oziroma skupne ugotovitve za serijo vseh 3 poskusov.

POSEBNE NALOGE (domače delo po učiteljevem naročilu):

I)

#### NALOGA V ZVEZI S SLIKO 1

Pokaži, da sta oba narisana pravokotna trikotnika na sliki res podobna (torej imata paroma enake kote): označi kote obeh trikotnikov kar na sliki.

II)

#### GRAFIČNA NALOGA

Teža telesa na vodoravni podlagi je 100 N, koeficient lepenja pa 0,25. Težo uteži postopno povečujemo. Nariši graf odvisnosti  $F_l$  (sile lepenja in ne njene maksimalne vrednosti  $F_{lM}$ !) od teže uteži  $F_{gU}$ . Vzemi samo smiselni razpon vrednosti  $F_{gU}$ !

III)

#### MISELNA NALOGA

Razmisli, kaj imata enačbi (2) in (3) skupnega, v čem se razlikujeta in zakaj.

#### DODATEK

Tabela 1: Nekaj koeficientov lepenja med pari različnih površin, če so gladke in suhe. Vir:

[http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d\\_778.html](http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html)

Material 1	Material 2	Kl
Aluminij	Aluminij	1,05 – 1,35
Aluminij	taljeno jeklo	0,61
Medenina	Jeklo	0,35
Oglje	Jeklo	0,14
Baker	Baker	1
Diamant	Diamant	0,1
Steklo	Steklo	0,9 – 1
Steklo	Kovina	0,5 – 0,7
Led	Les	0,05
Pleksi steklo	Pleksi steklo	0,8



Guma	Asfalt	0,9
Jeklo	Jeklo	0,8
Les	Les	0,25 – 0,5
Les	Kovina	0,2 – 0,6

## KONEC KOPIJE DELOVNEGA LISTA

### 1 SPLOŠNA NAVODILA ZA UČITELJA

Pri tem gradivu gre za primerjavo uspešnosti (glede razumevanja snovi in s kompetenčnega vidika) dveh načinov dela: 1) frontalne razlage z demonstracijskimi poskusi, 2) skupinskega eksperimentalnega dela z uporabo delovnih listov. V enem oddelku naj se preskusi en način dela, v drugem pa drugi način. Za oba načina je predvidena ena šolska ura, naslednjo šolsko uro pa učitelj pobere doma izpolnjene delovne liste in jih primerja za oba vzorca. Pri frontalnem demonstracijskem poskusu naj učitelj izvede sam vse 3 poskuse, opisane zgoraj, a v skrajšani obliki, za en sam kvader. V primeru skupinskega dela naj se razred razdeli na 3 skupine, vsaka pa naj izvede enega od 3 različnih poskusov, nazadnje (še isto šolsko uro) pa skupine poročajo o svojih rezultatih. Lahko pa je skupin več, npr. 6, če po dve delata enak poskus.

#### Tehnična opomba:

Pri prvih dveh poskusih (B1 in B2) pri skupinskem delu je najprimernejše, če ponovijo poskus s 3 kvadri, npr. lesenim, plastičnim in kovinskim. Naj uporabita obe skupini iste kvadre, da se lahko primerjajo rezultati dveh različnih meritev koeficienta lepenja za isti par snovi. Naj se pokaže pri dijakih organizacijska iznajdljivost: ko ena skupina dela z enim kvadrom, dela druga z drugim. Spodbudite jih, da sami pridejo do sklepa, da organizirajo delo s samo tremi kvadri (imenujmo jih K1, K2, K3). Naj si jih izmenjujejo in delajo npr. po tem vrstnem redu: skupina za poskus B1 – K1, K2, K3; skupina za poskus B2 – K2, K3, K1, tako da ne bo nepotrebnega čakanja. Če pa npr. dela skupina poskus B2 s kvadrom K2 prepočasi, medtem ko je skupina B1 poskus s kvadrom K1 končala veliko prej in sedaj čaka na kvader K2, naj se spet znajde. Opozorite jih tudi, da se skupini dogovorita in postavita kvadre na iste ploskve.

Pri delu z več skupinami je treba razdelitev pripomočkov organizirati drugače (treba jih je seveda imeti več).

#### Opomba glede tretje skupine in poskusa B3:

Ker je ta poskus daljši zaradi merjenja časa in poti, naj skupina opravi poskus z enim samim kvadrom, ki si ga ne deli s prvima dvema skupinama. Naj pa za preverbo zanesljivosti meritve izmeri čas pri isti poti kvadra dvakrat! Ker je to zahtevnejši poskus, naj bosta v skupini vsaj dva za fiziko nadarjena dijaka. Če pa mislite, da je poskus za nek razred pretežak, ga izpustite.



## 2 PODROBNEJŠA NAVODILA+časovni potek

### 2.1 VRSTNI RED IN TRAJANJE DOGODKOV

**Pomembno:** Delovne liste razdelite vsem dijakom predhodno uro fizike in jim naročite, naj jih preberejo doma, tako da bodo na poskuse bolj pripravljeni.

#### Pri frontalnem delu

- 3 poskusi po 10 minut, od tega je 5 minut sam poskus, 5 minut pa razlaga (3. Poskus morda traja dlje); dijaki na osnovi poskusov in razlage deloma izpolnjujejo delovne liste
- Domača naloga: dopolnitev delovnih listov

#### Pri skupinskem delu

- Vsaka od 3 skupin izvede svoj poskus (vse skupine sočasno), čas 20 minut
- Poročanje vodij skupin: po 5 minut, skupaj torej 15 minut
- Domača naloga: dopolnitev delovnih listov

**POMEMBNO:** Opozorite dijake, naj si po izvedenih poskusih zapišejo tudi meritve pri poskusih drugih skupin, zato da bodo delovne liste doma lahko izpolnili v celoti. Enako velja za vse meritve pri demonstracijskih frontalnih poskusih.

## REŠITVE POSEBNIH NALOG NA DELOVNIH LISTIH

### NALOGA V ZVEZI S SLIKO 1

Pokaži, da sta oba narisana pravokotna trikotnika na sliki res podobna (torej imata paroma enake kote): označi kote obeh trikotnikov kar na sliki.

REŠITEV:

Prava kota v obeh trikotnikih sta očitna. Dijaki bi lahko kot pri vznožju klanca označili npr. s  $\varphi$ , to pa je tudi kot med silo teže in njeno statično komponento. Da sta ta dva kota res enaka, naj dijaki dokažejo s paroma pravokotnimi kraki: statična komponenta teže je pravokotna na klanec, teža sama pa na stranico  $b$ .

**GRAFIČNA NALOGA:** Teža telesa na vodoravni podlagi je 100 N, koeficient lepenja pa 0,25. Težo uteži postopno povečujemo. Nariši graf odvisnosti  $F_1$  (sile lepenja in ne njene maksimalne vrednosti  $F_{1M}$ !) od teže uteži  $F_{gU}$ . Vzemi samo smiselni razpon vrednosti  $F_{gU}$ !

REŠITEV:

Najprej izračunamo maksimalno silo lepenja:  $F_{1M} = 0.25 \cdot 100 \text{ N} = 25 \text{ N}$ . Dokler teža  $F_{gU}$  in z njo sila vrvice ne preseže te mejne vrednosti, se sila lepenja »prilagaja« sili vrvice, tako da velja enakost:  $F_1 = F_{gU}$ . Graf  $F_1(F_{gU})$  je torej premica z naklonskim kotom  $45^\circ$ . Smiselni interval obeh sil (na vodoravni in navpični osi) je samo od 0 do 25 N.





REPUBLIKA SLOVENIJA

MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

www.mss.gov.si, e: gp.mss@gov.si  
Masarykova 16, 1000 Ljubljana  
t: 01 400 54 00, f: 01 400 53 21



Naložba v vašo prihodnost  
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA  
Evropski socialni sklad



## MISELNA NALOGA

Razmisli, kaj imata enačbi (2) in (3) skupnega, v čem se razlikujeta in zakaj.

### REŠITEV:

V obeh enačbah je člen  $m_U/m_T$ , saj je tako pri ravnovesju kot neravnovesju sil pomembno razmerje mas. Drugi člen v enačbi (3) je povezan z gibanjem. Če je čas gibanja zelo dolg, postane drugi člen zanemarljiv. To pomeni, da so sile skoraj v ravnovesju, v skladu z enačbo (2). Če pa je čas dovolj kratek, postane drugi člen po velikosti podoben prvemu, kar da nizko vrednost koeficienta trenja. Pomembna razlika pa je tudi v koeficientih za lepenje in trenje, ki v splošnem nista enaka. Dijake opozorite tudi na to, da bi lahko dala enačba (3) tudi negativni rezultat za koeficient trenja; to pa je fizikalno nesmiselno in lahko pomeni le nenatančnost pri merjenih količinah ali pa napako v njihovem zapisu.